

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון שני

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעתיים ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים,

טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים – $33\frac{1}{3} \times 2$ – $66\frac{2}{3}$ נקודות

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה,

פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות – $33\frac{1}{3} \times 1$ – $33\frac{1}{3}$ נקודות

סך הכול – 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.

כתובת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($\frac{2}{3}$ נקודות) 66

ענה על שתיים מן השאלות 1–3 (לכל שאלה – $\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. הנקודה $(0, t)$ היא מוקד של פרבולה קנונית ומוקד של אליפסה קנונית. t הוא פרמטר חיובי.

אורך הציר הראשי של האליפסה הוא $4t$.

בסעיפים שלפניך הבע את תשובותיך באמצעות t , אם יש צורך.

א. מצא את משוואת הפרבולה ואת משוואת האליפסה.

המדריך של הפרבולה חותך את האליפסה בשתי נקודות, A ו- B . הנקודה A נמצאת מעל לנקודה B .

ב. מצא את שיעורי הנקודות A ו- B .

ישר המאונך לציר ה- x , עובר במוקד הפרבולה וחותך את הפרבולה בשתי נקודות, C ו- D .

הנקודה C נמצאת מעל לנקודה D .

ג. מצא את שיעורי הנקודות C ו- D .

ד. (1) הסבר מדוע ארבע הנקודות A, B, C, D נמצאות על מעגל אחד.

(2) מצא את שיעורי מרכז המעגל הזה.

2. נתונים שני מישורים: $\pi_1: z - 3 = 0$, $\pi_2: ay + z - 8 = 0$, a הוא פרמטר שונה מ-0.

הזווית בין המישורים היא 45° .

א. מצא את הערכים האפשריים בעבור הפרמטר a .

הנקודה $A(2, -2, 6)$ נמצאת על אחד המישורים הנתונים. מן הנקודה A הורידו אנך למישור האחר.

האנך חותך את המישור האחר בנקודה B .

ב. מצא את אורך הקטע AB .

ג. ℓ הוא ישר החיתוך בין שני המישורים π_1 ו- π_2 .

ד. מצא את ההצגה הפרמטרית של ℓ .

הנקודה B העבירו אנך לישר ℓ . האנך חותך את הישר ℓ בנקודה C .

ד. מצא את שטח המשולש ABC (תוכל לסרטט את המשולש במערכת צירים לשם כך).

3. נתונים שני מספרים מרוכבים:

$$z_1 = (2a^2 + 5a + 4) + (2a^2 + 3a + 2)i$$

$$z_2 = (a^2 + 8a + 8) + (2 - a^2 + 2a)i$$

a הוא פרמטר ממשי.

א. מצא את הערך של a שבעבורו המספרים z_1 ו- z_2 צמודים זה לזה.

הצב את הערך של a שמצאת, וענה על הסעיפים ב-ג.

נתונים המספרים: $w_1 = \left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{4n}$, $w_2 = \left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right)^{4n+2}$. n הוא מספר טבעי.

ב. הוכח כי לכל n טבעי:

(1) המספר w_1 הוא מספר ממשי.

(2) המספר w_2 הוא מספר מדומה טהור.

ג. נתונה המשוואה: $|z - p| = m$. p ו- m הם פרמטרים ממשיים, z הוא מספר מרוכב.

מה הם הערכים של p ו- m שבעבורם המשוואה הנתונה מתארת מעגל במישור גאוס שעליו נמצאים המספרים

w_1 ו- w_2 לכל n טבעי? נמק.

פרק שני — גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות (33 $\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מן השאלות 4–5.

שים לב: אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^{2x} - 3e^x + m}{4}$. m הוא פרמטר.

ידוע כי הישר $y = -1$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$.

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- (2) מצא את m .
- (3) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
- (4) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן (אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x)} + 1$.

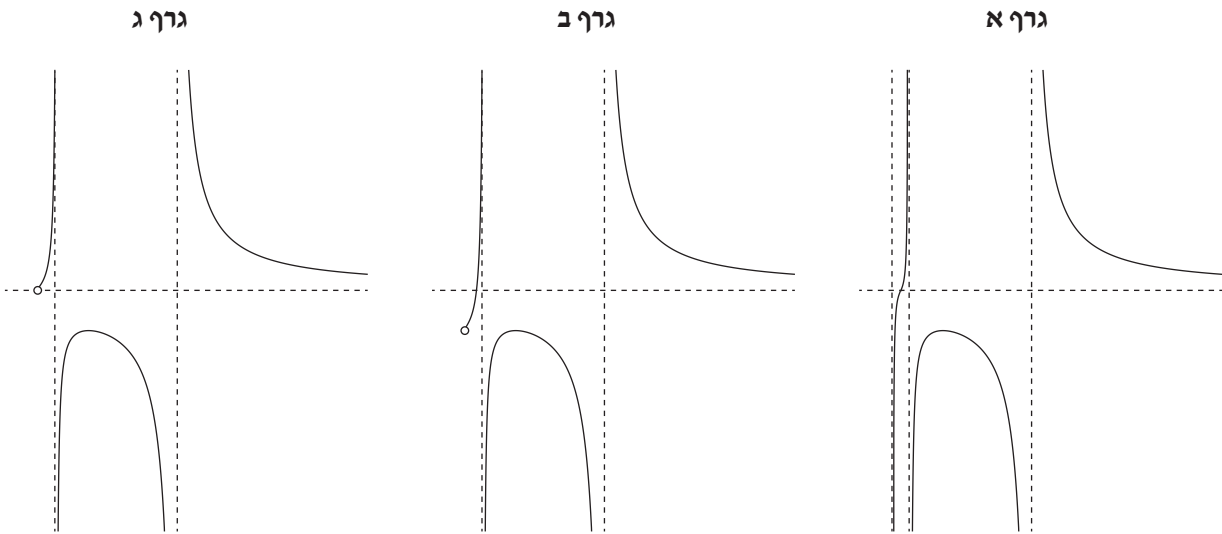
- ג. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.
- (2) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נתון פרמטר t בתחום $0 < t < \ln 4$.

ה. מצא את הערך של t שבעבורו ערך הביטוי $\int_0^t g(x) dx$ הוא מקסימלי. נמק את תשובתך.

5. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{(\ln(x))^2}{(\ln(x))^2 - 1}$

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 (2) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.
 (3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
- ב. לפניך שלושה גרפים שבהם לא מסומנים הצירים x ו- y . הקווים המרוסקים מייצגים את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים, והעיגול הריק מייצג נקודה שבה הפונקציה אינה מוגדרת. קבע איזה מן הגרפים מתאים לגרף הפונקציה $f(x)$, העתק אותו למחברתך, והוסף בו את מערכת הצירים. פרט את שיקולך.



- ג. (1) האם יש פתרון למשוואה $f(x) = 1$? נמק את תשובתך.
 (2) מהו הערך של k שבעבורו יש למשוואה $f(x) = k$ פתרון יחיד? נמק את תשובתך.

נתונות הפונקציות: $g(x) = \frac{1}{f(x) - 1}$, $h(x) = (\ln(x))^2 + 1$

- נסמן מלבן ABCD. הנקודות A ו-B הן שתי נקודות על ציר ה- x שבהן הפונקציה $g(x)$ אינה מוגדרת. הנקודות C ו-D נמצאות על גרף הפונקציה $h(x)$.
 ד. מהו שטח המלבן ABCD? נמק את תשובתך.

בהצלחה!