

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

תוכנית חדשה

הוראות

א. משך הבחינה: ארבע שעות ועשרים דקות.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה ארבעה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

- פרק ראשון – שאלות קצרות
 - פרק שני – אינדוקצייה, סדרות והסתברות
 - פרק שלישי – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור
 - פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות
- יש לענות על חמש שאלות לבחירתכם – לכל שאלה 22 נקודות.
סך הנקודות שתוכלו לצבור לא יעלה על 100.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
 - (2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש.
- יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
- יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
- חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

ענו על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה – 22 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – שאלות קצרות

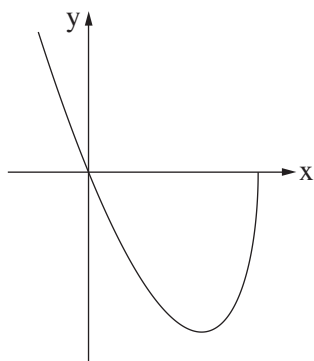
1. ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. נתון כי השוויון $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{b}$ מתקיים בעבור $n = 2$.

b הוא פרמטר שונה מ-0.

(1) מצאו את הערך של b.

(2) הציבו $b = 4$ והוכיחו באינדוקציה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי השוויון הנתון מתקיים לכל n טבעי.



ב. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x)$ המוגדרת בתחום $x \leq 6$.

אחד מן הביטויים I-IV שלפניכם מייצג את הפונקצייה $f(x)$.

I. $f(x) = x\sqrt{6-x}$

II. $f(x) = -x\sqrt{6-x}$

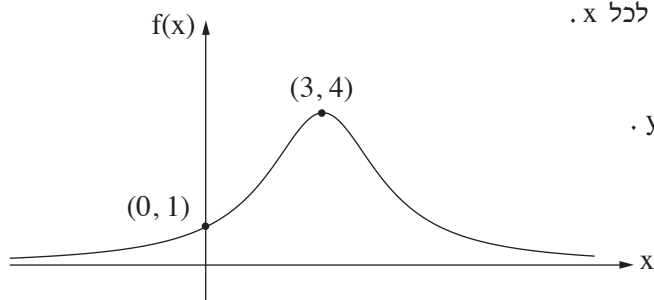
III. $f(x) = x\sqrt{x-6}$

IV. $f(x) = -x\sqrt{x-6}$

(1) קבעו איזה מן הביטויים מייצג את הפונקצייה $f(x)$. נמקו את קביעתכם.

נתונה הפונקצייה $g(x) = (f(x))^2$ המוגדרת בתחום $x \leq 6$.

(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x .



ג. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x)$ המוגדרת לכל x .

לפונקצייה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד

ואסימפטוטה אופקית אחת בלבד שמשוואתה היא $y = 0$.

שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$

ושיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$

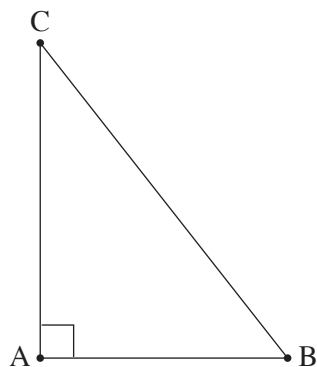
עם ציר ה- y מוצגים בסרטוט.

נתונה הפונקצייה $g(x) = \frac{1}{f(x)-2}$.

(1) כמה אסימפטוטות המאונכות לציר ה- x יש לפונקצייה $g(x)$? נמקו את תשובתכם.

(2) מצאו את משוואת האסימפטוטה המאונכת לציר ה- y של הפונקצייה $g(x)$.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.



ד. בסרטוט שלפניכם משולש ישר זווית ABC ($\angle CAB = 90^\circ$).

נתון כי אורכי צלעות המשולש הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית.

האיבר הראשון בסדרה שווה לאורך הצלע AB .

נתון: $AB = 1$.

(1) האם ייתכן שהאיבר השני בסדרה שווה לאורך הצלע BC ? נמקו את תשובתכם.

(2) מצאו את אורך הצלע BC (בתשובתכם תוכלו להשאיר שורש).

פרק שני – אינדוקצייה, סדרות והסתברות

2.

a_n היא סדרה הנדסית איך-סופית יורדת שכל איבריה חיוביים ומנתה היא q .

א. לפניכם שלוש טענות III-I. קבעו איזו מן הטענות נכונה ונמקו את קביעתכם.

I. $-1 < q < 0$

II. $0 < q < 1$

III. $1 < q$

b_n היא סדרה איך-סופית שאיבריה מקיימים $b_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$ לכל n טבעי.

ב. הוכיחו כי הסדרה b_n היא הנדסית ומנתה היא q .

נתון כי סכום הסדרה b_n גדול פי 1.96 מסכום הסדרה a_n .

ג. מצאו את הערך של q .

c_n היא סדרה שאיבריה מקיימים $c_n = \frac{b_n}{4 \cdot a_n}$ לכל n טבעי.

נתון כי סכום k האיברים הראשונים בסדרה הוא 34.79.

ד. (1) הוכיחו כי הסדרה c_n היא קבועה.

(2) מצאו את הערך של k .

החליפו את הסימן של כל אחד מן האיברים שנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה c_n .

ה. מצאו את סכום k האיברים הראשונים בסדרה c_n לאחר החלפת הסימנים. נמקו את תשובתכם.

3.

כדי להתקבל לעבודה בחברה מסוימת על המועמדים לעבור שלושה שלבי קבלה זה אחר זה: מבחן א', מבחן ב' וריאיון אישי.

רק מועמד שעובר את מבחן א' ניגש למבחן ב', ורק מועמד שעובר את מבחן ב' ניגש לריאיון.

מועמד שעובר את כל שלושת השלבים מתקבל לעבודה.

ההסתברות שמועמד יעבור את מבחן א' היא p ($0 < p < 1$).

ההסתברות שמועמד שעבר את מבחן א' יעבור את מבחן ב' גדולה פי 2 מן ההסתברות שמועמד יעבור את מבחן א'.

ההסתברות שמועמד יתקבל לעבודה גדולה פי 3 מן ההסתברות שמועמד יעבור את שני המבחנים ולא יעבור את הריאיון.

א. מצאו את ההסתברות שמועמד שעבר את שני המבחנים יעבור את הריאיון.

94% מן המועמדים לא מתקבלים לעבודה.

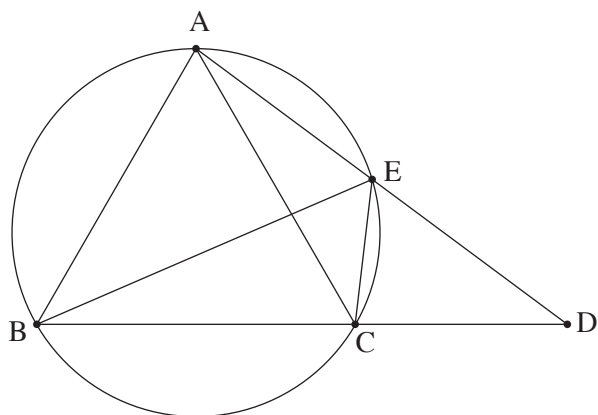
ב. מצאו את הערך של p .

ג. ידוע כי מועמד לא התקבל לעבודה. מהי ההסתברות שמועמד זה עבר את מבחן א'?

מבין כל המועמדים שלא התקבלו לעבודה בוחרים באקראי 5 מועמדים.

ד. מהי ההסתברות שלפחות שניים מהם עברו את מבחן א'?

פרק שלישי – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור



4. ABC הוא משולש שווה צלעות החסום במעגל.

הנקודה D נמצאת על המשך הצלע BC, כמתואר בסרטוט.

הקטע AD חותך את המעגל בנקודה E.

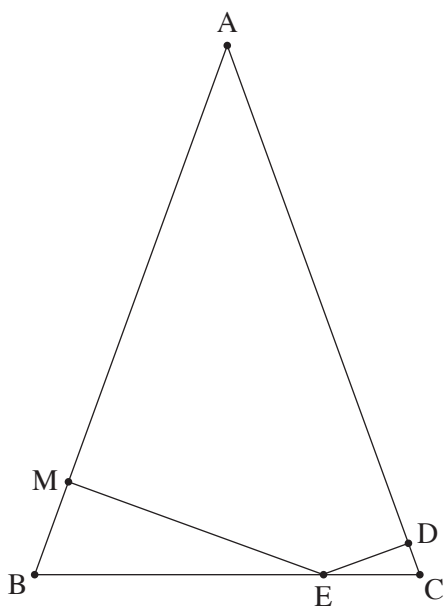
א. הוכיחו: $\angle AEB = \angle BEC = \angle CED = 60^\circ$.

ב. הוכיחו: $\triangle AEB \sim \triangle CED$.

ג. הוכיחו: $\frac{AE}{CE} = \frac{BC}{CD}$.

נתון כי שטח המשולש AEB גדול פי 2.25 משטח המשולש CED.

ד. מצאו פי כמה גדול שטח המשולש ABD משטח המשולש CED.



5. בסרטוט שלפניכם משולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$).

הנקודה E נמצאת על הבסיס BC כך ש- $BE = 3 \cdot EC$.

הנקודה D נמצאת על הצלע AC כך ש- ED מאונך ל- AC.

הנקודה M נמצאת על הצלע AB כך ש- EM מאונך ל- AB.

נסמן: $EC = k$, $\angle ABC = \alpha$, $30^\circ < \alpha < 90^\circ$.

א. הביעו באמצעות k ו- α את אורכי הקטעים DE ו- ME.

נתון כי סכום שטחי המשולשים CED ו- BEM הוא $1.6k^2$.

ב. מצאו את הערך של α .

נתון כי אורך רדיוס המעגל החוסם את המשולש AED הוא 29.

ג. מצאו את הערך של k.

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{6(x-1)^2}{x^2 + a}$.

a הוא פרמטר חיובי.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן. הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

נתון כי שיעור ה- y של נקודת המקסימום של הפונקצייה $f(x)$ הוא 7.5.

ג. מצאו את הערך של a.

בעבור הערך של a שמצאתם ענו על הסעיפים ד-ה.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

$f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של הפונקצייה $f(x)$.

$g(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$ היא פונקצייה המקיימת

ה. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקצייה $g(x)$.

(3) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x בתחום $-a \leq x \leq 0$.

7. נתונה הפונקצייה $f(x) = (\sin x)^2 \cdot \cos(2x)$, המוגדרת בתחום $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

א. הוכיחו כי הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית.

ב. מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

פונקציית הנגזרת $f'(x)$ מוגדרת בתחום $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = \sqrt{a \cdot f'(x)}$.

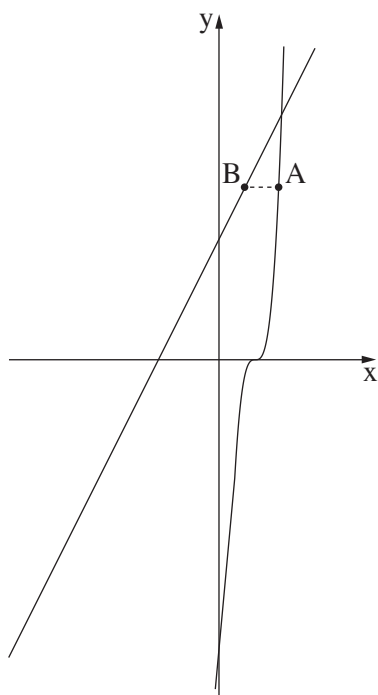
a הוא פרמטר שלילי.

ד. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה- x .

נתון כי לפונקצייה $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד בתחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.



8. בסרטוט שלפניכם מתוארים גרף הפונקצייה $f(x) = (4x - 2)^3$ והישר $y = 3x + b$.
 b הוא פרמטר חיובי.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$ כך ששיעור ה־ x שלה קטן משיעור ה־ x של נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הישר הנתון.
 הנקודה B נמצאת על הישר הנתון כך שהקטע AB מקביל לציר ה־ x .
 נסמן ב־ t את שיעור ה־ x של הנקודה A .

נתון: $0 \leq t \leq 0.7$.

א. הביעו באמצעות b ו־ t את שיעור ה־ x של הנקודה B .

- ב. (1) מצאו את הערך של t שבעבורו אורך הקטע AB הוא מינימלי.
 (2) מצאו את הערך של t שבעבורו אורך הקטע AB הוא מקסימלי.

בהצלחה