

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון שני

תוכנית חדשה

הוראות

א. משך הבחינה: שעותיים וחמישים וחמש דקות.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.
פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים
פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות
יש לענות על שלוש שאלות לבחירתכם – $3 \times 33 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:
(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:
(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש.
יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

ענו על שלוש מן השאלות 1–5 (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

1. נתון הישר $y = x$ ונתונה הפרבולה $y^2 = 2px$.

p הוא פרמטר חיובי.

הנקודה A נמצאת ברביע הראשון, והיא נקודת חיתוך של הפרבולה עם הישר.

א. הביעו באמצעות p את שיעורי הנקודה A .

נסמן ב- ℓ את המשיק לפרבולה בנקודה A .

הנקודה F היא מוקד הפרבולה. מעגל I שמרכזו בנקודה F משיק לישר ℓ בנקודה B .

ב. הביעו באמצעות p את משוואת מעגל I .

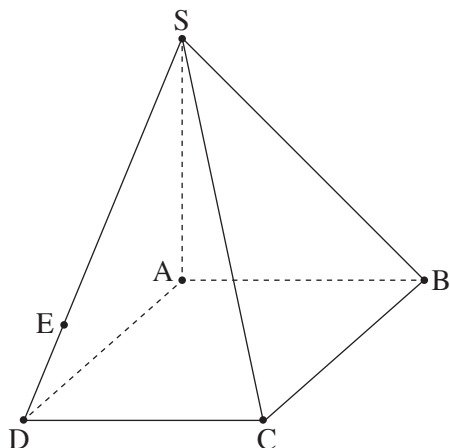
ג. הראו כי הנקודה B נמצאת על ציר ה- y .

נתון: $AB = 4\sqrt{5}$.

ד. מצאו את הערך של p .

ה. מצאו את משוואת המקום הגאומטרי של מרכזי המעגלים המשיקים מבפנים למעגל I ואורך הרדיוס שלהם

הוא $2\sqrt{5} - 3$.



2. בסרטוט שלפניכם פירמידה $SABCD$ שבסיסה $ABCD$ הוא ריבוע.

המקצוע AS הוא גובה בפירמידה.

אורך המקצוע AS שווה לאורך צלע הריבוע $ABCD$.

הנקודה E נמצאת על המקצוע SD כך ש- $SE = \frac{3}{4} \cdot SD$.

הנקודה N מקיימת: $\vec{SN} = k \cdot \vec{SC}$. k הוא פרמטר.

נסמן: $\vec{AS} = \underline{w}$, $\vec{AB} = \underline{v}$, $\vec{AD} = \underline{u}$.

א. הביעו באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$ ו- k את הווקטור $\vec{EN}$.

נתון: $|\vec{EN}| = \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot |\underline{w}|$.

ב. מצאו את הערך של k .

הציבו $k = \frac{1}{2}$, וענו על הסעיפים ג-ד.

ממקמים את הפירמידה במערכת צירים כך ש- $A(0, 0, 0)$, $B(0, 12, 0)$.

הקודקוד D נמצא על החלק החיובי של ציר ה- x , והקודקוד S נמצא על החלק החיובי של ציר ה- z .

ג. (1) מצאו את שיעורי הנקודות N ו- E .

(2) מצאו את משוואת המישור ENB .

ד. האם נפח הפירמידה $SENB$ גדול מנפח הפירמידה $CENB$, קטן ממנו או שווה לו? נמקו את תשובתכם.

3. נתונים שלושה מספרים מרוכבים:

$$w = z_1 \cdot z_2 + \frac{z_1}{z_2}, \quad z_2 = \frac{1}{r} \cdot (\cos(\alpha + 90^\circ) + i \cdot \sin(\alpha + 90^\circ)), \quad z_1 = r \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$$

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ, \quad r > 0$$

הנקודה A מייצגת את המספר w במישור גאוס. נתון כי שיעור ה- x של הנקודה A הוא -1 .

א. מצאו את הערך של α .

נתון כי הנקודה A נמצאת על הישר $y = -1$.

ב. מצאו את הערך של r .

$$z^4 = 128 \cdot (z_1 \cdot w)^2$$

z הוא משתנה מרוכב.

ג. מצאו את ארבעת הפתרונות של המשוואה.

הנקודה O היא ראשית הצירים.

כל אחת מן הנקודות B ו- C מייצגת פתרון אחד מבין הפתרונות שמצאתם בסעיף ג.

הנקודה B נמצאת ברביע הראשון והנקודה C נמצאת ברביע השני.

המקום הגאומטרי של כל הנקודות $z = x + iy$ במישור גאוס המקיימות $|z| = b$ חותך את החלק החיובי של ציר ה- y .

בנקודה K .

b הוא מספר ממשי חיובי.

נתון כי שטח המרובע $CKBO$ הוא $7\sqrt{2}$.

ד. מצאו את הערך של b .

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{1}{e^x - 1} + \frac{5}{e^x - 5} + a$. הוא פרמטר. a

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

ב. הוכיחו כי פונקציית הנגזרת $f'(x)$ שלילית בכל תחום הגדרתה.

נתון כי הישר $y = 2$ הוא אסימפטוטה של הפונקצייה $f(x)$.

ג. מצאו את שני הערכים האפשריים של a .

הציבו $a = 2$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים ד-ו.

ד. הראו כי $f(x) = \frac{2e^{2x} - 6e^x}{e^{2x} - 6e^x + 5}$.

ה. (1) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- x .

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ו. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $f(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר $x = \ln 2$.

5. נתונה הפונקצייה $f(x) = 8 \cdot \ln(x^2 + 7) - 2x$, המוגדרת לכל x .

א. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ב. מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה והקעירות כלפי מטה של הפונקצייה $f(x)$.

ידוע כי הפונקצייה $f(x)$ חותכת את ציר ה- x בנקודה אחת בלבד.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = \ln(f(x) - 18)$, המוגדרת בתחום שבו $f(x) > 18$.

ד. (1) כמה אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x יש לפונקצייה $g(x)$? נמקו את תשובתכם.

(2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

בהצלחה