

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

א. משך הבחינה: ארבע שעות.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

- פרק ראשון – אלגברה והסתברות
- פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור
- פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

יש לענות על חמש שאלות לבחירתכם – 22 נקודות לשאלה.
סך הנקודות שתוכלו לצבור לא יעלה על 100.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
 - (2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש.
- יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

ענו על חמש מן השאלות 1–8 (לכל שאלה – 22 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1. ביום ראשון יצאו שתי מכוניות, מכונית א' ומכונית ב', מעיר A ונסעו לעיר B באותו הכביש. מכונית א' יצאה בשעה 8:00 ונסעה במהירות v קמ"ש, ומכונית ב' יצאה בשעה 8:27 ונסעה במהירות mv קמ"ש. שתי המכוניות הגיעו לעיר B באותה השעה.
- א. קבעו איזה מן הביטויים III–I שלפניכם מייצג את אורך הכביש בין עיר A ובין עיר B. נמקו את קביעתכם.

$$\text{I. } \frac{0.45mv}{m-1}$$

$$\text{II. } \frac{1.45mv}{m+1}$$

$$\text{III. } \frac{0.55mv}{m-1}$$

- ביום שני בשעה 8:00 יצאה מכונית א' מעיר B ונסעה לעיר A, ומכונית ב' יצאה מעיר A ונסעה לעיר B. כל אחת מהן נסעה באותו הכביש ובאותה המהירות שבה נסעה ביום ראשון. 45 דקות לאחר ששתי המכוניות יצאו לדרך, המרחק ביניהן היה 36 ק"מ. המכוניות נפגשו בשעה 9:00.

ב. (1) מצאו את הערך של m .

(2) מצאו את אורך הכביש בין עיר A ובין עיר B.

מייד לאחר שנפגשו המכוניות, עצרה מכונית א' למשך שעה וחצי, ולאחר מכן המשיכה לנסוע לעיר A באותה המהירות שבה נסעה קודם.

מכונית ב' המשיכה לנסוע בלי לעצור, ומייד לאחר שהגיעה לעיר B נסעה חזרה לעיר A.

ג. מצאו באיזו שעה נפגשו המכוניות בפעם השנייה.

2.

a_n היא סדרה הנדסית אין-סופית יורדת שכל איבריה חיוביים ומנתה היא q .

א. לפניכם שלוש טענות I–III. קבעו איזו מן הטענות נכונה ונמקו את קביעתכם.

I. $-1 < q < 0$

II. $0 < q < 1$

III. $1 < q$

b_n היא סדרה אין-סופית שאיבריה מקיימים $b_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$ לכל n טבעי.

ב. הוכיחו כי הסדרה b_n היא הנדסית ומנתה היא q .

נתון כי סכום הסדרה b_n גדול פי 1.96 מסכום הסדרה a_n .

ג. מצאו את הערך של q .

c_n היא סדרה שאיבריה מקיימים $c_n = \frac{b_n}{4 \cdot a_n}$ לכל n טבעי.

נתון כי סכום k האיברים הראשונים בסדרה הוא 34.79.

ד. (1) הוכיחו כי הסדרה c_n היא קבועה.

(2) מצאו את הערך של k .

החליפו את הסימן של כל אחד מן האיברים שנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה c_n .

ה. מצאו את סכום k האיברים הראשונים בסדרה c_n לאחר החלפת הסימנים. נמקו את תשובתכם.

3.

כדי להתקבל לעבודה בחברה מסוימת על המועמדים לעבור שלושה שלבי קבלה זה אחר זה: מבחן א', מבחן ב' וריאיון אישי.

רק מועמד שעובר את מבחן א' ניגש למבחן ב', ורק מועמד שעובר את מבחן ב' ניגש לריאיון.

מועמד שעובר את כל שלושת השלבים מתקבל לעבודה.

ההסתברות שמועמד יעבור את מבחן א' היא p ($0 < p < 1$).

ההסתברות שמועמד שעבר את מבחן א' יעבור את מבחן ב' גדולה פי 2 מן ההסתברות שמועמד יעבור את מבחן א'.

ההסתברות שמועמד יתקבל לעבודה גדולה פי 3 מן ההסתברות שמועמד יעבור את שני המבחנים ולא יעבור את הריאיון.

א. מצאו את ההסתברות שמועמד שעבר את שני המבחנים יעבור את הריאיון.

94% מן המועמדים לא מתקבלים לעבודה.

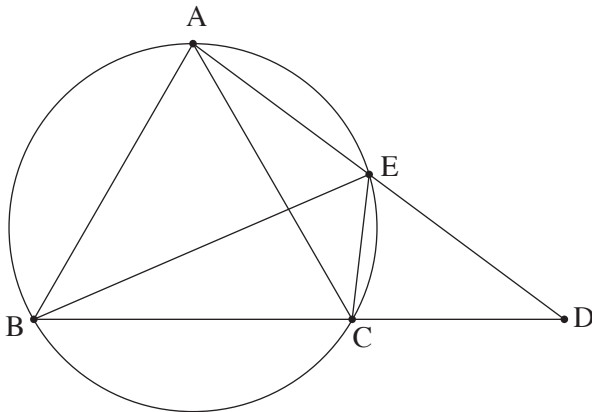
ב. מצאו את הערך של p .

ג. ידוע כי מועמד לא התקבל לעבודה. מהי ההסתברות שמועמד זה עבר את מבחן א'?

מבין כל המועמדים שלא התקבלו לעבודה בוחרים באקראי 5 מועמדים.

ד. מהי ההסתברות שלפחות שניים מהם עברו את מבחן א'?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור



4. ABC הוא משולש שווה צלעות החסום במעגל.

הנקודה D נמצאת על המשיך הצלע BC, כמתואר בסרטוט.

הקטע AD חותך את המעגל בנקודה E.

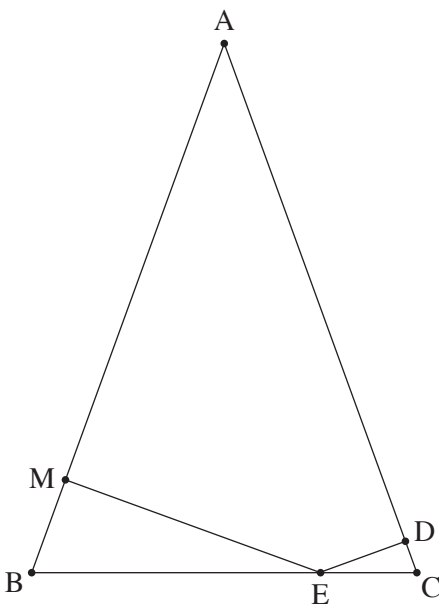
א. הוכיחו: $\angle AEB = \angle BEC = \angle CED = 60^\circ$.

ב. הוכיחו: $\triangle AEB \sim \triangle CED$.

ג. הוכיחו: $\frac{AE}{CE} = \frac{BC}{CD}$.

נתון כי שטח המשולש AEB גדול פי 2.25 משטח המשולש CED.

ד. מצאו פי כמה גדול שטח המשולש ABD משטח המשולש CED.



5. בסרטוט שלפניכם משולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$).

הנקודה E נמצאת על הבסיס BC כך ש- $BE = 3 \cdot EC$.

הנקודה D נמצאת על הצלע AC כך ש- ED מאונך ל- AC.

הנקודה M נמצאת על הצלע AB כך ש- EM מאונך ל- AB.

נסמן: $EC = k$, $\angle ABC = \alpha$, $30^\circ < \alpha < 90^\circ$.

א. הביעו באמצעות k ו- α את אורכי הקטעים ME ו- DE.

נתון כי סכום שטחי המשולשים CED ו- BEM הוא $1.6k^2$.

ב. מצאו את הערך של α .

נתון כי אורך רדיוס המעגל החוסם את המשולש AED הוא 29.

ג. מצאו את הערך של k.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{6(x-1)^2}{x^2 + a}$.

a הוא פרמטר חיובי.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן. הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

נתון כי שיעור ה- y של נקודת המקסימום של הפונקצייה $f(x)$ הוא 7.5.

ג. מצאו את הערך של a .

בעבור הערך של a שמצאתם ענו על הסעיפים ד-ה.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

$f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של הפונקצייה $f(x)$.

$g(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$ היא פונקצייה המקיימת

ה. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקצייה $g(x)$.

(3) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x בתחום $-a \leq x \leq 0$.

7. נתונה הפונקצייה $f(x) = (\sin x)^2 \cdot \cos(2x)$, המוגדרת בתחום $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

א. הוכיחו כי הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית.

ב. מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

פונקציית הנגזרת $f'(x)$ מוגדרת בתחום $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = \sqrt{a \cdot f'(x)}$.

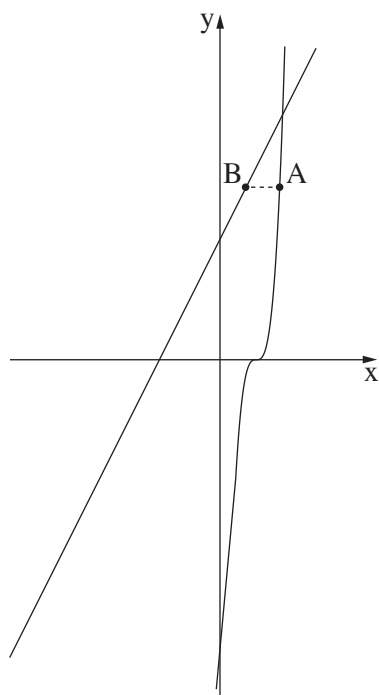
a הוא פרמטר שלילי.

ד. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה- x .

נתון כי לפונקצייה $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד בתחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.



8. בסרטוט שלפניכם מתוארים גרף הפונקצייה $f(x) = (4x - 2)^3$ והישר $y = 3x + b$.
 b הוא פרמטר חיובי.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$ כך ששיעור ה־ x שלה קטן משיעור ה־ x של נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הישר הנתון.
 הנקודה B נמצאת על הישר הנתון כך שהקטע AB מקביל לציר ה־ x .
 נסמן ב־ t את שיעור ה־ x של הנקודה A .

נתון: $0 \leq t \leq 0.7$.

א. הביעו באמצעות b ו־ t את שיעור ה־ x של הנקודה B .

- ב. (1) מצאו את הערך של t שבעבורו אורך הקטע AB הוא מינימלי.
 (2) מצאו את הערך של t שבעבורו אורך הקטע AB הוא מקסימלי.

בהצלחה!