

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

תוכנית חדשה

א. משך הבחינה: ארבע שעות ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה ארבעה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון – שאלות קצרות

פרק שני – אינדוקצייה, סדרות והסתברות

פרק שלישי – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש,

של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

יש לענות על חמש שאלות, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות

מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי.

$100 = 20 \times 5$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים

בעזרת מחשבון.

יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.

כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

ענו על חמש מן השאלות 1-8, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 20 נקודות).

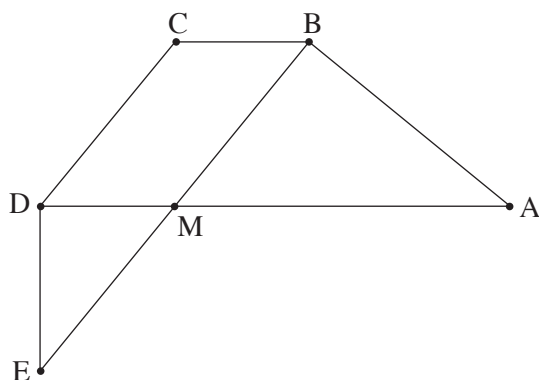
שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – שאלות קצרות

1. ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. הוכיחו באינדוקציה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{2}{3} + \frac{6}{9} + \frac{10}{27} + \dots + \frac{4n-2}{3^n} = 2 - \frac{2n+2}{3^n}$$



ב. בסרטוט שלפניכם טרפז $ABCD$ ($BC \parallel AD$)

וטרפז $BCDE$ ($CD \parallel BE$).

הנקודה M היא נקודת החיתוך של הצלעות AD ו- BE .

נתון: $AB \perp BM$, $ED \perp AD$, $EM = BM$.

אורך הקטע AM גדול פי 2.5 מאורך הקטע DM .

נסמן: $\angle EMD = \alpha$.

(1) מצאו את הערך של α .

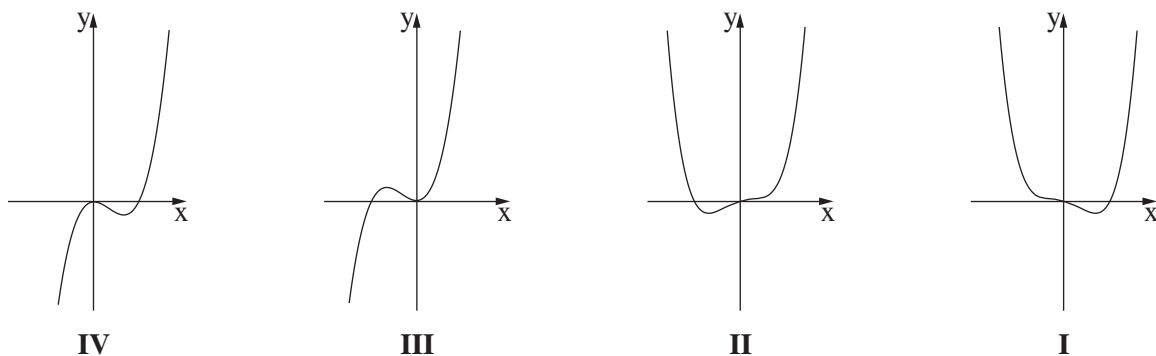
נתון: $DM = 6$.

(2) חשבו את שטח הטרפז $ABCD$.

ג. נתונות הפונקציות $f(x) = x^n(x-1)$ ו- $g(x) = x^n(x+1)$, המוגדרות לכל x .

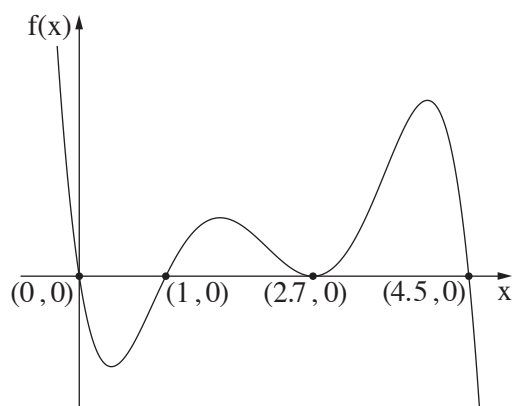
n הוא פרמטר טבעי גדול מ-1.

כל אחד מן הגרפים IV-I שלפניכם מייצג אחת מן הפונקציות $f(x)$ או $g(x)$ בעבור n זוגי או n אי-זוגי.



(1) התאימו לכל אחד מן הגרפים IV-I את הפונקצייה, $f(x)$ או $g(x)$, המתאימה לו בעבור n זוגי או n אי-זוגי.

(2) הציבו $n = 2$ וחשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x .



ד. בסרטוט שלפניכם מתוארת הפונקצייה $f(x)$ המוגדרת לכל x .

בסרטוט מצוינים כל שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$

עם ציר ה- x .

פונקצייה $g(x)$ מוגדרת בתחום $x \geq 0$, ומקיימת $g(x) = \int_0^x f(t) dt$.

(1) מצאו את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון

של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגן.

נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $f(x)$

ועל ידי ציר ה- x בתחום $1 \leq x \leq 2.7$.

נתון: $g(2.7) = 0$, $g(4.5) = 3 \cdot S$.

(2) הביעו באמצעות S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x , בתחום $0 \leq x \leq 4.5$.

פרק שני – אינדוקצייה, סדרות והסתברות

2. a_n היא סדרה הנדסית אינסופית עולה שמנתה היא q .
 $0 < q < 1$.
 א. קבעו אם כל איברי הסדרה a_n הם חיוביים או שליליים. נמקו את קביעתכם.
 b_n היא סדרה הנדסית אינסופית וגם מנתה היא q .
 c_n היא סדרה אינסופית המקיימת לכל n טבעי $c_n = 2b_n - a_n$ ($c_n \neq 0$).
 ב. הוכיחו כי הסדרה c_n היא הנדסית, והביעו את מנתה באמצעות q .
 נתון כי $c_1 = 6\frac{2}{3}$, וכי סכום איברי הסדרה c_n גדול פי 8 מסכום איברי הסדרה b_n .
 ג. מצאו את הערך של a_1 .
 נתון כי סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה a_n גדול ב-4 מסכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים בסדרה a_n .
 ד. מצאו את הערך של q .
3. בבית אריזה גדול אורזים שני סוגי פירות בלבד: לימונים ותפוזים.
 חלק מן הפירות מיועדים לייצוא והשאר אינם מיועדים לייצוא.
 ההסתברות לבחור באקראי שני תפוזים מבין כל הפירות בבית האריזה היא 0.4096.
 בוחרים באקראי פרי אחד מבין כל הפירות בבית האריזה.
 א. מהי ההסתברות שנבחר לימון?
 ההסתברות לבחור באקראי תפוז מבין הפירות שמיועדים לייצוא היא $\frac{3}{5}$.
 ההסתברות לבחור באקראי לימון מבין הפירות שאינם מיועדים לייצוא היא $\frac{1}{5}$.
 בוחרים באקראי פרי אחד מבין כל הפירות בבית האריזה.
 ב. מהי ההסתברות שנבחר פרי המיועד לייצוא?
 בוחרים באקראי שני פירות מבין כל הפירות בבית האריזה.
 ג. ידוע שנבחרו שני לימונים. מהי ההסתברות שאחד מהם מיועד לייצוא והאחר אינו מיועד לייצוא?
 בוחרים באקראי 4 פירות מבין כל הפירות בבית האריזה. ידוע שלפחות אחד מהם מיועד לייצוא.
 ד. מהי ההסתברות שלכל היותר 3 מבין הפירות שנבחרו מיועדים לייצוא?

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{2ax}{(x^2 - 9)^2}$, a הוא פרמטר חיובי.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)$ שפונקציית הנגזרת שלה היא $g'(x) = f(x) + 1$.

תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$ ושל פונקציית הנגזרת $g'(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

נתון כי לפונקצייה $g(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = -1$.

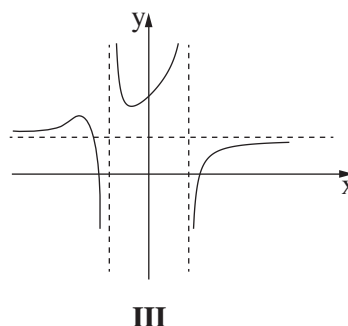
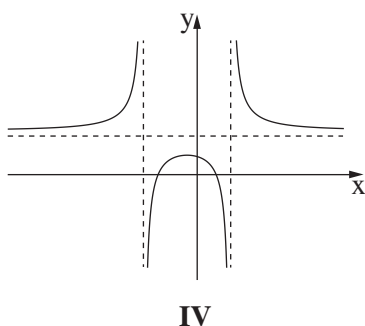
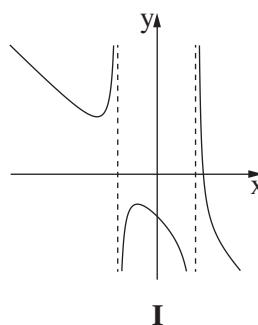
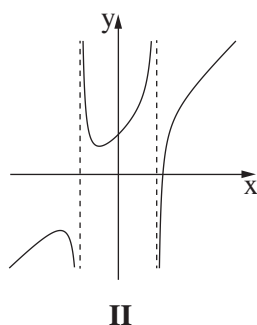
ב. מצאו את הערך של a .

הציבו את הערך של a שמצאתם בפונקצייה $f(x)$ וענו על הסעיפים ג-ד.

נתון כי הפונקצייה $g(x)$ עוברת בנקודה $(1, 7)$.

ג. כתבו ביטוי אלגברי אפשרי לפונקצייה $g(x)$.

ד. קבעו איזה מן הגרפים IV-I שלפניכם הוא גרף אפשרי של הפונקצייה $g(x)$. נמקו את קביעתכם.

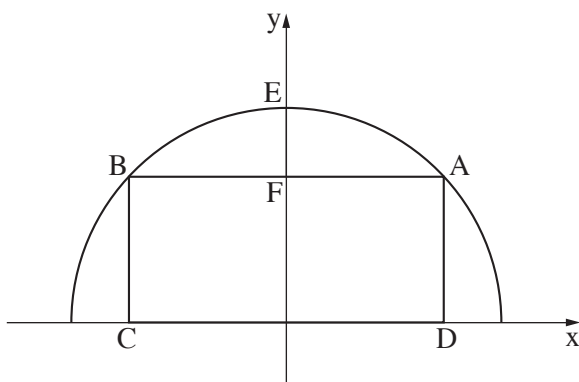


7. נתונה הפונקצייה $f(x) = 2 \cos x + \frac{1}{\cos x}$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
- (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לציר ה- x של הפונקצייה $f(x)$.
- ב. קבעו אם הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית. נמקו את קביעתכם.
- ג. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.
- ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = 2 \cos x + \frac{2 \sin x}{\sin(2x)}$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

- ה. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.
- (2) הראו כי $g(x) = 2 \cos x + \frac{1}{\cos x}$, בעבור כל x בתחום הגדרתה.
- ו. האם קיים ערך של k שבעבורו הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקצייה $g(x)$ ב-3 נקודות בדיוק? אם כן, מצאו אותו. אם לא, נמקו את תשובתכם.



8. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, R הוא פרמטר חיובי.

- הפונקצייה $f(x)$ מוגדרת בתחום $-R \leq x \leq R$.
- הנקודה A נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$ ברביע הראשון.
- דרך הנקודה A העבירו ישר המקביל לציר ה- x
- וחותך את גרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודה נוספת B .
- הנקודות C ו- D נמצאות על ציר ה- x כך שנוצר מלבן $ABCD$.
- הנקודה F היא נקודת החיתוך של הצלע AB עם ציר ה- y .
- הנקודה E היא נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- y .
- נתון ריבוע שאורך הצלע שלו שווה לאורך הקטע EF .
- נסמן ב- t את שיעור ה- x של הנקודה A .
- א. (1) הביעו באמצעות R ו- t את אורך הקטע EF .
 - (2) הביעו באמצעות R ו- t את היקף המלבן $ABCD$.
 - ב. הביעו באמצעות R את הערך של t שבעבורו ההפרש בין היקף המלבן $ABCD$ לבין היקף הריבוע הוא מקסימלי.

בהצלחה!