

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

א. משך הבחינה: ארבע שעות.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.
פרק ראשון – אלגברה והסתברות
פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור
פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות
יש לענות על חמש שאלות, לפחות על שאלה אחת מכל פרק – $20 \times 5 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
- (2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

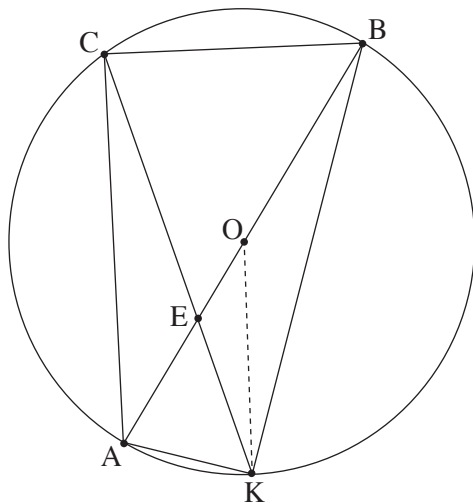
ענו על חמש מן השאלות 1–8, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – 20 נקודות).
שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

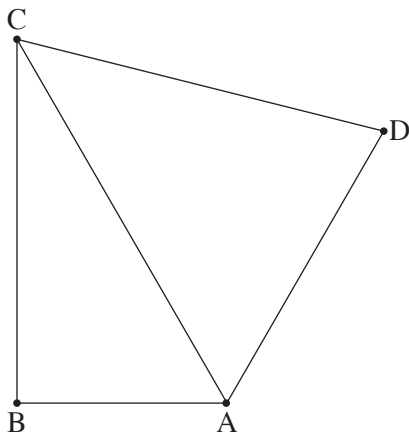
1. האורך של מסילת הרכבת בין חדרה לבאר שבע הוא 150 ק"מ.
רכבת א' יצאה מחדרה לבאר שבע ונסעה במהירות קבועה.
רבע שעה לאחר מכן יצאה רכבת ב' מבאר שבע לחדרה, וגם היא נסעה במהירות קבועה.
שתי הרכבות חלפו זו על פני זו, והגיעו ליעדים שלהן באותה השעה.
ידוע כי רבע שעה לאחר שרכבת ב' יצאה לדרכה, לפני שהרכבות חלפו זו על פני זו, המרחק ביניהן היה 70 ק"מ.
א. מצאו את מהירות הנסיעה של רכבת א' ואת מהירות הנסיעה של רכבת ב'.
ב. מצאו כמה זמן לאחר יציאתה של רכבת א', המרחק בין הרכבות היה 70 ק"מ פעם נוספת.
2. a_n היא סדרה הנדסית אין-סופית עולה שמנתה היא q .
 $0 < q < 1$.
א. קבעו אם כל איברי הסדרה a_n הם חיוביים או שליליים. נמקו את קביעתכם.
 b_n היא סדרה הנדסית אין-סופית וגם מנתה היא q .
 c_n היא סדרה אין-סופית המקיימת לכל n טבעי $c_n = 2b_n - a_n$ ($c_n \neq 0$).
ב. הוכיחו כי הסדרה c_n היא הנדסית, והביעו את מנתה באמצעות q .
ג. נתון כי $c_1 = 5\frac{2}{3}$, וכי סכום איברי הסדרה c_n גדול פי 17 מסכום איברי הסדרה b_n .
מצאו את הערך של a_1 .
ד. נתון כי סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה a_n גדול ב-4 מסכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים בסדרה a_n .
מצאו את הערך של q .

3. בבית אריזה גדול אורזים שני סוגי פירות בלבד: לימונים ותפוזים. חלק מן הפירות מיועדים לייצוא והשאר אינם מיועדים לייצוא. ההסתברות לבחור באקראי שני תפוזים מבין כל הפירות בבית האריזה היא 0.4096. בוחרים באקראי פרי אחד מבין כל הפירות בבית האריזה.
- א. מהי ההסתברות שנבחר לימון?
- ההסתברות לבחור באקראי תפוז מבין הפירות שמיועדים לייצוא היא $\frac{3}{5}$. ההסתברות לבחור באקראי לימון מבין הפירות שאינם מיועדים לייצוא היא $\frac{4}{15}$. בוחרים באקראי פרי אחד מבין כל הפירות בבית האריזה.
- ב. מהי ההסתברות שנבחר פרי המיועד לייצוא?
- בוחרים באקראי שני פירות מבין כל הפירות בבית האריזה.
- ג. ידוע שנבחרו שני לימונים. מהי ההסתברות שאחד מהם מיועד לייצוא והאחר אינו מיועד לייצוא?
- בוחרים באקראי 4 פירות מבין כל הפירות בבית האריזה. ידוע שלפחות אחד מהם מיועד לייצוא.
- ד. מהי ההסתברות שלכל היותר 3 מבין הפירות שנבחרו מיועדים לייצוא?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור



4. AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O.
 המיתר CK חותך את הרדיוס AO בנקודה E (ראו סרטוט).
 נתון: $\angle EKO = \angle ABK$.
 א. הוכיחו כי $\triangle ACE \sim \triangle OKE$.
 המשיך הקטע KO חותך את המיתר CB בנקודה P.
 נתון כי $PO = 4$, וכי רדיוס המעגל הוא 4.8.
 ב. (1) הוכיחו כי PO הוא קטע אמצעים במשולש ABC.
 (2) מצאו את אורך הקטע EO.
 ג. מצאו את היחס בין שטח המשולש ACE ובין שטח המשולש AOK.



5. בסרטוט שלפניכם משולש ישר זווית ABC ($\angle ABC = 90^\circ$).
 על הצלע AC בנו משולש נוסף ACD כך ש-AC הוא חוצה זווית BAD.
 נסמן: $AB = k$, $\angle CAB = \alpha$.
 א. הביעו באמצעות k ו- α את האורך של AC.
 נתון: $AD = 1.5 \cdot k$, $CD = \sqrt{3.25} \cdot k$.
 ב. חשבו את הערך של α .
 הציבו $\alpha = 60^\circ$ וענו על סעיפים ג-ד.
 הנקודה M היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC.
 ג. הביעו באמצעות k את רדיוס המעגל החסום במשולש ABC.
 הנקודה E היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC.
 נתון: $ME = 6$.
 ד. חשבו את הערך של k.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{2ax}{(x^2 - 16)^2}$, a הוא פרמטר חיובי.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)$ שפונקציית הנגזרת שלה היא $g'(x) = f(x) + 1$.

תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$ ושל פונקציית הנגזרת $g'(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

נתון כי לפונקצייה $g(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = -2$.

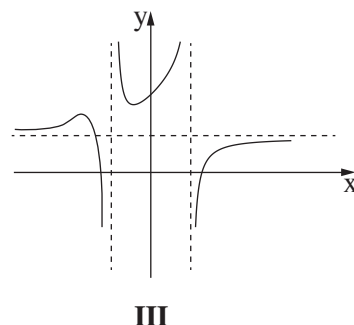
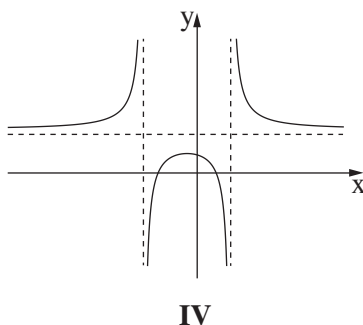
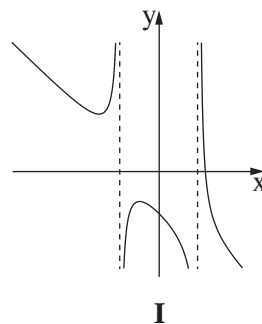
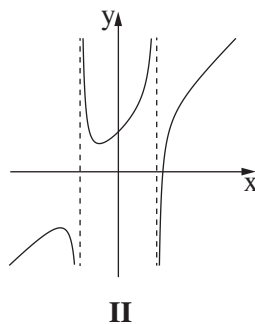
ב. מצאו את הערך של a .

הציבו את הערך של a שמצאתם בפונקצייה $f(x)$ וענו על הסעיפים ג-ד.

נתון כי הפונקצייה $g(x)$ עוברת בנקודה $(2, 7)$.

ג. כתבו ביטוי אלגברי אפשרי לפונקצייה $g(x)$.

ד. קבעו איזה מן הגרפים IV-I שלפניכם הוא גרף אפשרי של הפונקצייה $g(x)$. נמקו את קביעתכם.

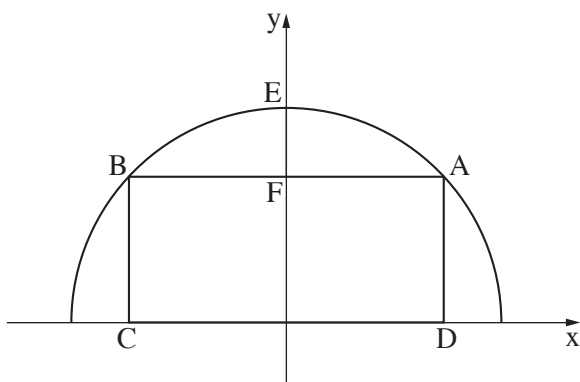


7. נתונה הפונקצייה $f(x) = 2 \cos x + \frac{1}{\cos x}$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
- (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לציר ה- x של הפונקצייה $f(x)$.
- ב. קבעו אם הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית. נמקו את קביעתכם.
- ג. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.
- ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = 2 \cos x + \frac{2 \sin x}{\sin(2x)}$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

- ה. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.
- (2) הראו כי $g(x) = 2 \cos x + \frac{1}{\cos x}$, בעבור כל x בתחום הגדרתה.
- ו. האם קיים ערך של k שבעבורו הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקצייה $g(x)$ ב-3 נקודות בדיוק? אם כן, מצאו אותו. אם לא, נמקו את תשובתכם.



8. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, R הוא פרמטר חיובי.

- הפונקצייה $f(x)$ מוגדרת בתחום $-R \leq x \leq R$.
- הנקודה A נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$ ברביע הראשון.
- דרך הנקודה A העבירו ישר המקביל לציר ה- x וחותר את גרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודה נוספת B.
- הנקודות C ו-D נמצאות על ציר ה- x כך שנוצר מלבן ABCD.
- הנקודה F היא נקודת החיתוך של הצלע AB עם ציר ה- y .
- הנקודה E היא נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- y .
- נתון ריבוע שאורך הצלע שלו שווה לאורך הקטע EF.
- נסמן ב- t את שיעור ה- x של הנקודה A.
- א. (1) הביעו באמצעות R ו- t את אורך הקטע EF.
 - (2) הביעו באמצעות R ו- t את היקף המלבן ABCD.
 - ב. הביעו באמצעות R את הערך של t שבעבורו ההפרש בין היקף המלבן ABCD לבין היקף הריבוע הוא מקסימלי.

בהצלחה!